3 Gleichstromnetzwerke (8)

Ziele:

Das Ziel dieses Kapitels ist das Kennenlernen von Verfahren zur **Berechnung von Spannungen und Strömen** in elektrischen Netzwerken.

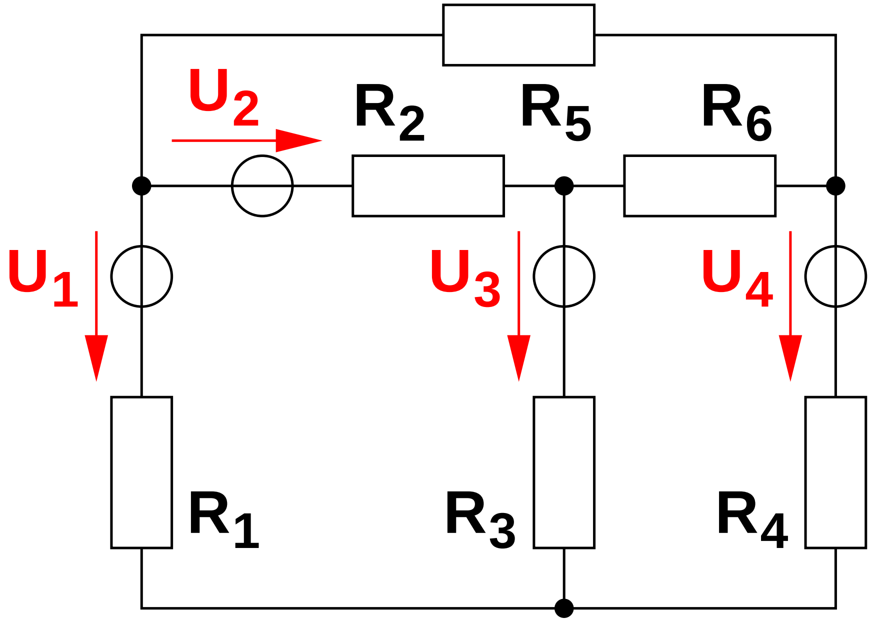


Abbildung 3.0.1: Beispielnetzwerk aus einer Übungsaufbabe

→ Die **Berechnung der Ströme in den Widerständen** bei gegegenen Spannungen und Widerständen ist Inhalt der Aufgabe 3.9.10.

Aufgabe: Ziel der **Netzwerkanalyse** ist die **Berechnung** von Spannungen und / oder Strömen in elektrischen Netzwerken, also der beliebigen Verschaltung von elektrischen Bauelementen.

$\rightarrow$ **Gleichstromanalyse** im wesentlichen mit Widerständen und Gleichspannungs- und / oder Gleichstromquellen.

Linear: Bei **linearen Netzen** existieren nur **lineare Strom-Spannung-Beziehungen**, d.h. es gilt

- das Ohmsche Gesetz $U = RI$ für **Widerstände** und
- alle **Quellen** haben eine lineare U-I-Kennlinie.

$\rightarrow$ Es entstehen **lineare Gleichungssysteme** zur Berechnung der Spannungen und Ströme.

Vereinfachung: Da in einem **linearen** Netzwerk alle Spannungen und Ströme der Widerstände über das Ohmsche Gesetz $U = IR$ voneinander abhängen, braucht man nur

- die **Ströme** oder
- die **Spannungen** zu berechnen.

Mathematik

Wenn alle Quellen und Widerstände **bekannt** sind, müssen für n Widerstände die Spannungen und Ströme berechnet werden, also $2n$ **Unbekannte**.

- Es müssen $2n$ **Gleichungen** zur Lösung gefunden werden.
- Das Ohmsche Gesetz $U = RI$ stellt n Gleichungen für $2n$ Unbekannte zur Verfügung.
- Es müssen weitere n **Gleichungen gefunden** werden.

Verfahren:

Es existieren fünf **Verfahren zur Berechnung** der Ströme und Spannungen in linearen Netzwerken:

1. Direktes Anwenden der Kirchhoffschen Gleichungen
2. Ersatzspannungs- oder Ersatzstromquelle
3. Überlagerungssatz oder Superpositionsprinzip
4. Maschenanalyse oder Maschenstromverfahren
5. Knotenanalyse oder Knotenpotentialverfahren

Aufgabe: Gegeben sei ein Netz mit zwei Spannungsquellen. Der **Strom I_3** durch den Widerstand R_3 soll analytisch bestimmt werden!

→ Reichen die **bekannten Methoden** aus? Ja!

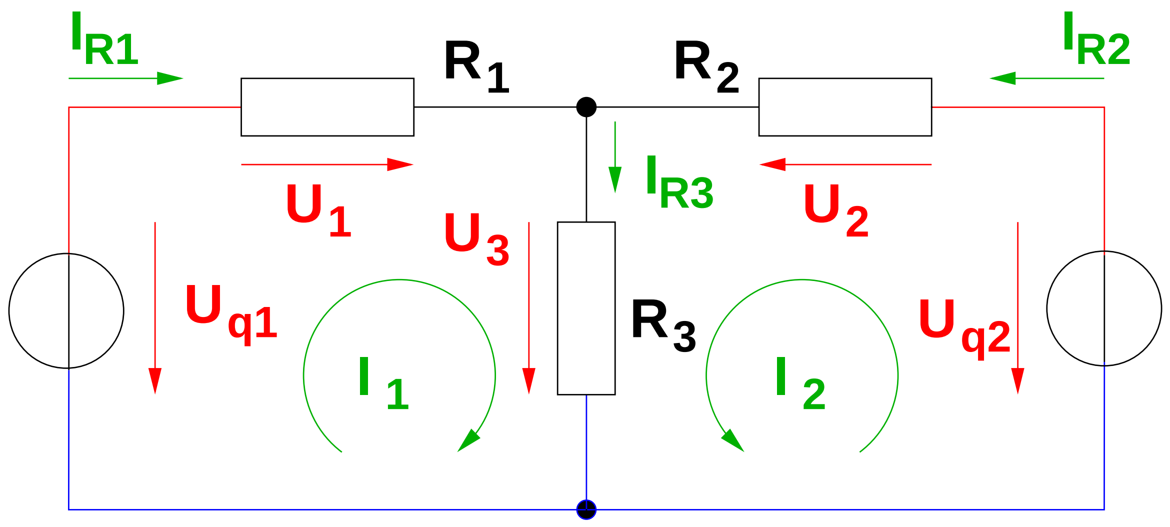


Abbildung 3.2.1: T-Netzwerk mit zwei Spannungsquellen

Lösung: Anwendung des Ohmschen Gesetzes und der **Kirchhoffschen Gleichungen** zur Bestimmung der **6 Unbekannten**:

- Spannungen $U_{1...3}$ und
- Ströme $I_{R_1...R_3}$.

Aufgabe: Für die **6 Unbekannten** werden **6 unabhängige Gleichungen** benötigt. Wie findet man sie?

Netzwerk: Ein elektrisches Netzwerk besteht aus z **Zweigen**, die an den k **Knoten** miteinander verbunden sind und somit m **Maschen** bilden.

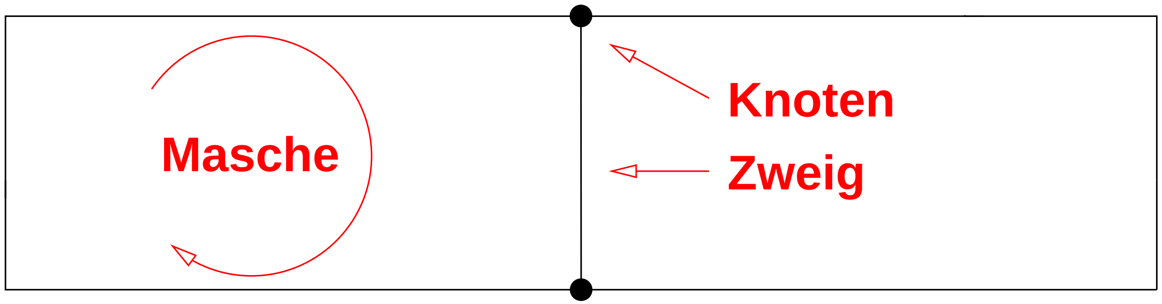


Abbildung 3.2.2: Darstellung von Zweigen, Knoten und Maschen

- An einem **Knoten** sind mindestens 3 Zweige angeschlossen.
- Ein **Zweig** verbindet 2 Knoten miteinander wobei alle Bauelemente vom selben Strom durch flossen werden.
- Eine **Masche** ist ein geschlossener Weg über Zweige und Knoten.

Frage 1: Wie viele **Zweige, Knoten und Maschen** enthält die Beispielschaltung?

- Zweige: $z = 3$, zwischen je zwei Punkten
- Knoten: $k = 2$, die beiden schwarzen Punkte
- Maschen: $m = 3$, links, rechts und außen herum

$\rightarrow$ Damit ergeben sich 2 Knotengleichungen, 3 Maschengleichungen und 3 Gleichungen aus dem Ohmschen Gesetz, also **8 Gleichungen** für **6 Unbekannte**.

Frage 2: Welche der **8 Gleichungen** sind **linear unabhängig**?

- Aus dem **Ohmschen Gesetz** für jeden Zweig ergeben sich $z = 3$ unabhängige Gleichungen.
- Bei $k = 2$ Knoten ist $k - 1 = 1$ **Knotengleichung** linear unabhängig.
- Also müssen von den **Maschengleichungen**

$$m' = z - (k - 1) = 3 - (2 - 1) = 2 \tag{3.2.1}$$

unabhängig sein!

Frage 3: Wie findet man alle **linear unabhängigen** Maschengleichungen?

$\rightarrow$ In dem einfachen **Beispiel** kann eine beliebige der 3 Maschen weggelassen werden.

Praxis: Eine praktische **Methode** zur Auswahl unabhängiger Maschen ist:

Nach Auswahl einer Masche **trennt man diese Masche** in einem beliebigen Zweig auf. Weitere Maschen dürfen **keine aufgetrennten Zweige** enthalten. Es werden so viele Maschen gebildet wie möglich sind.

Ohmsches Gesetz: 3 Gleichungen

$$U_i = R_i I_{R_i} \qquad ,i = 1{,}3 \tag{3.2.2}$$

Maschenregel: 2 Gleichungen

$$\begin{aligned} -U_{q1} + U_1 + U_3 &= 0 \\ -U_{q2} + U_2 + U_3 &= 0 \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Knotenregel: 1 Gleichung

$$I_{R_1} + I_{R_2} - I_{R_3} = 0 \tag{3.2.4}$$

Mathematik: Zur Berechnung der **Zweigströme** erhält man ausgehend von den **Maschengleichungen**

$$\begin{array}{ccccc} U_1 & & + U_3 & = & U_{q1} \\ & U_2 & + U_3 & = & U_{q2} \end{array} \tag{3.2.5}$$

Mit dem **Ohmschen Gesetz** folgt

$$\begin{array}{ccccc} I_{R_1}R_1 & & + I_{R_3}R_3 & = & U_{q1} \\ & I_{R_2}R_2 & + I_{R_3}R_3 & = & U_{q2} \end{array} \tag{3.2.6}$$

Mit der **Knotengleichung** kann der Strom I_3 eliminiert werden

$$\begin{aligned} I_{R_1}R_1 \qquad\qquad + \ (I_{R_1}+I_{R_2})\ R_3 &= U_{q1} \\ I_{R_2}R_2 + \ (I_{R_1}+I_{R_2})\ R_3 &= U_{q2} \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Ordnet man diese Gleichungen nach den beiden Unbekannten, so ergibt sich folgendes **Gleichungssystem**

$$\begin{aligned} (R_1+R_3)\ I_{R_1} + \quad R_3 \quad I_{R_2} &= U_{q1} \\ R_3 \quad I_{R_1} + (R_2+R_3)\ I_{R_2} &= U_{q2} \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

oder in **Matrizenschreibweise**

$$\boxed{\begin{bmatrix} R_1+R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2+R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{R_1} \\ I_{R_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{q_1} \\ U_{q_2} \end{bmatrix}} \tag{3.2.9}$$

Ergebnis: Die Untersuchung eines **linearen Netzes** führt zu einem **linearen Gleichungssystem** für die Unbekannten (Ströme), das nun nur noch aufgelöst werden muss.

$\rightarrow$ Anwenden mathematischer Methoden, heute mit **Taschenrechner** direkt lösbar.

Matrizen: Für alle, die noch **keine Matrizenrechnung kennen** kommt hier die minimal notwendige Mathematik. Die Schreibweise mit der 3×3-Matrix[1]

$$\begin{bmatrix} R_{1A} & R_{1B} & R_{1C} \\ R_{2A} & R_{2B} & R_{2C} \\ R_{3A} & R_{3B} & R_{3C} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} \tag{3.2.10}$$

ist nur eine **verkürtzte Schreibweise** für das Gleichungssystem mit den **drei Gleichungen**

$$R_{1A} \cdot I_A + R_{1B} \cdot I_B + R_{1C} \cdot I_C = U_1 \tag{3.2.11}$$
$$R_{2A} \cdot I_A + R_{2B} \cdot I_B + R_{2C} \cdot I_C = U_2 \tag{3.2.12}$$
$$R_{3A} \cdot I_A + R_{3B} \cdot I_B + R_{3C} \cdot I_C = U_3 \tag{3.2.13}$$

in der beispielhaft die **Elemente** R_{ij} der Matrix mit den **Komponenten** I_j des Ergebnisvektors multipliziert werden.

[1] Die Buchstaben A, B, C dienen nur der besseren Unterscheidung der Spalten von den Zeilen mit den Ziffern 1, 2 und 3.

Rang:

Das lineare Gleichungssystem

$$\underline{R} \cdot \underline{I} = \underline{U} \tag{3.2.14}$$

ist genau dann **eindeutig lösbar**, wenn der **Rang der Matrix** $\underline{R}$ gleich der Anzahl der Zeilen der Matrix ist. Dann ist aber auch die Determinate der Matrix ungleich Null.

$\rightarrow$ Alle **Gleichungen** sind linear unabhängig!

Determinaten:

Die Determinante einer 3×3-**Koeffizientenmatrix** $\underline{R}$ berechnet sich aus dem Produkt der Hauptdiagonalen minus dem Produkt der Nebendiagonalen zu

$$\begin{aligned} D = |\underline{R}| &= \left| \begin{array}{ccc} R_{1A} & R_{1B} & R_{1C} \\ R_{2A} & R_{2B} & R_{2C} \\ R_{3A} & R_{3B} & R_{3C} \end{array} \right| \begin{array}{cc} R_{1A} & R_{1B} \\ R_{2A} & R_{2B} \\ R_{3A} & G_{3B} \end{array} \\ &= R_{1A}R_{2B}R_{3C} + R_{1B}R_{2C}R_{3A} + R_{1C}R_{2A}R_{3B} - \\ &\quad R_{3A}R_{2B}R_{1C} - R_{3B}R_{2C}R_{1A} - R_{3C}R_{2A}R_{1B} \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

Cramer: Die Lösung des **linearen** Gleichungssystems 3.2.9 ist mit der **Cramer'schen Regel**

$$x_i = \frac{D_i}{D} \tag{3.2.16}$$

möglich[2]. Die Determinante der 2×2-**Koeffizientenmatrix** berechnet sich aus dem Produkt der Hauptdiagonale minus dem Produkt der Nebendiagonale zu

$$D = \begin{vmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{vmatrix} = R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3 \neq 0 \tag{3.2.17}$$

und entsprechend die beiden **Hilfsdeterminanten** zu

$$D_1 = \begin{vmatrix} U_{q1} & R_3 \\ U_{q2} & R_2 + R_3 \end{vmatrix} = U_{q1}(R_2 + R_3) - U_{q2}R_3 \tag{3.2.18}$$

und zu

$$D_2 = \begin{vmatrix} R_1 + R_3 & U_{q1} \\ R_3 & U_{q2} \end{vmatrix} = U_{q2}(R_1 + R_3) - U_{q1}R_3 \tag{3.2.19}$$

$\rightarrow$ Aus $D \neq 0$ folgt, dass eine **eindeutige** Lösung des Gleichungssystems existiert!

[2] Oder mit dem gaußschen Eliminationsverfahren, bei dem die Koeffizientenmatrix in Dreiecksform gebracht wird.

Ströme:

Damit ergeben sich die Teilströme

$$I_{R_1} = \frac{D_1}{D} = \frac{U_{q_1}(R_2 + R_3) - U_{q_2} R_3}{\sum R_i R_j} \tag{3.2.20}$$

und

$$I_{R_2} = \frac{D_2}{D} = \frac{U_{q_2}(R_1 + R_3) - U_{q_1} R_3}{\sum R_i R_j} \tag{3.2.21}$$

Der gesuchte **Strom** I_{R_3} ist dann die **Summe** dieser beiden Ströme

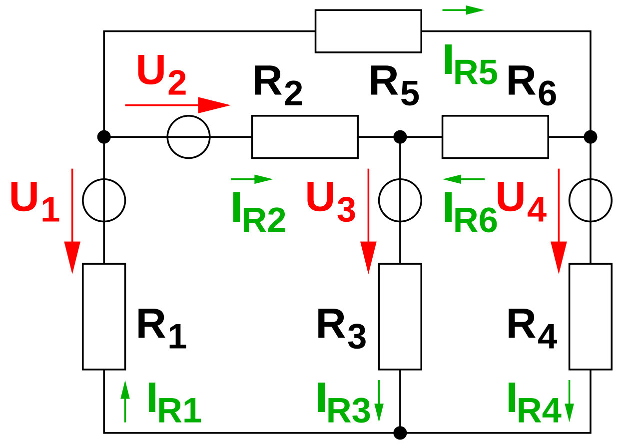
$$I_{R_3} = I_{R_1} + I_{R_2} = \frac{U_{q_1} R_2 + U_{q_2} R_1}{\sum R_i R_j} \tag{3.2.22}$$

Bewertung: Anwenden der **Kirchhoffschen Gleichungen**

- POSITIV: Es ist das **allgemeinste** Verfahren zur Bestimmung **aller** Unbekannten und ist **immer** einsetzbar.
- Es sind **maximal** z Knoten- und Maschen-Gleichungen zu lösen. Zusätzlich werden z Ohmsche Gleichungen verwendet.
- NEGATIV: Es sind immer **alle** z Gleichungen notwendig, auch wenn im Extremfall nur **ein** Strom oder **eine** Spannung gesucht wird.
- Alle **anderen** Verfahren basieren ebenfalls auf den Kirchhoffschen Gleichungen.

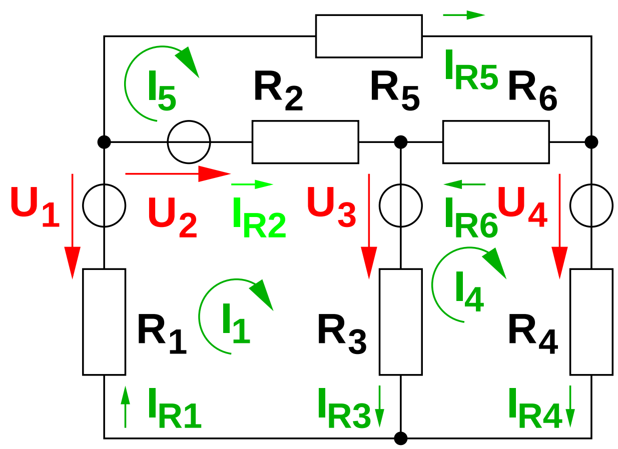
Aufgabe 3.9.10
(Netzwerk)
-> Seite 544

Die angegebene Schaltung mit $U_1 = 36V$, $U_2 = 9V$, $U_3 = 10V$ und $U_4 = 12V$ enthält die Widerstände $R_1 = R_5 = 5\Omega$, $R_2 = 6\Omega$, $R_3 = R_6 = 3\Omega$ und $R_4 = 4\Omega$.
Die in den Widerständen R_1 bis R_6 fließenden Ströme sind zu bestimmen.



Lösung zur
Aufgabe 3.9.10
(Netzwerk)

Mit drei Maschen mit den unbekannten Kreisströmen I_1, I_4 und und I_5 kann die Maschenanalyse verwendet werden.



Wir erhalten damit drei Gleichungen mit drei Unbekannten

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2+R_3 & -R_3 & -R_2 \\ -R_3 & R_3+R_4+R_6 & -R_6 \\ -R_2 & -R_6 & R_2+R_5+R_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1-U_2-U_3 \\ U_3-U_4 \\ U_2 \end{bmatrix} \tag{A.2.58}$$

Zusammengefasst und mit Zahlenwerten

$$\begin{bmatrix} 14\Omega & -3\Omega & -6\Omega \\ -3\Omega & 10\Omega & -3\Omega \\ -6\Omega & -3\Omega & 14\Omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17V \\ -2V \\ 9V \end{bmatrix} \tag{A.2.59}$$

Die Lösung mit einem Matrixlöser im Taschenrechner ergibt die ersten gesuchten Ströme zu

$$\begin{bmatrix} I_{R_1} \\ I_{R_4} \\ I_{R_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}20A \\ 1{,}00A \\ 1{,}80A \end{bmatrix} \tag{A.2.60}$$

Durch vorzeichrichtige Überlagerung der Maschenströme ergeben sich die fehlenden Ströme zu

$$I_{R_2} = I_1 - I_5 = 2{,}2A - 1{,}8A = \underline{\underline{0{,}4A}} \tag{A.2.61}$$

$$I_{R_3} = I_1 - I_4 = 2{,}2A - 1{,}0A = \underline{\underline{1{,}2A}} \tag{A.2.62}$$

$$I_{R_6} = I_5 - I_4 = 1{,}8A - 1{,}0A = \underline{\underline{0{,}8A}} \tag{A.2.63}$$