Fachhochschule
Münster University of
Applied Sciences

Grundgebiete der Elektrotechnik 1

Teil 1: Gleichstrom

Teil 2: Wechselstrom

Peter Richert

(Stand: 2. Januar 2014)[1]

Fachhochschule Münster, Fachbereich Elektrotechnik und Informatik

eLKaTe — Labor Kommunikationstechnik

Stegerwaldstraße 39, 48 565 Steinfurt, Tel.: +49 2551 9-62125,

eMail: peter.richert@fh-muenster.de

http: www.ktet.fh-muenster.de

Inhaltsverzeichnis

3. Gleichstromnetzwerke

Ziele: Das Ziel dieses Kapitels ist das Kennenlernen von Verfahren zur Berechnung von Spannungen und Strömen in elektrischen Netzwerken.

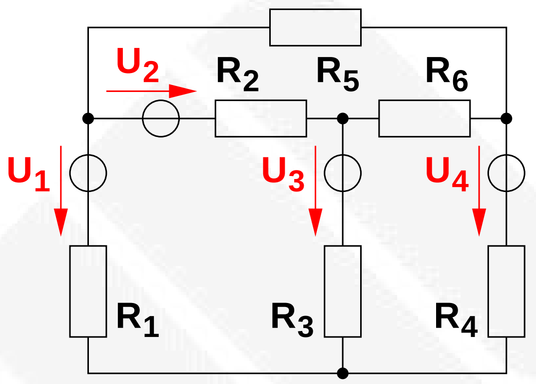


Abbildung 3.0.1.: Beispielnetzwerk aus einer Übungsaufbabe

$\rightarrow$ Die Berechnung der Ströme in den Widerständen des Netzes in Abb. 3.0.1 bei gegegenen Spannungen und Widerständen ist Inhalt der Aufgabe 3.9.10.

3.1. Grundlagen

Aufgabe: Ziel der Netzwerkanalyse ist die Berechnung von Spannungen und / oder Strömen in elektrischen Netzwerken, also der beliebigen Verschaltung von elektrischen Bauelementen.

$\rightarrow$ Gleichstromanalyse im wesentlichen mit Widerständen und Gleichspannungs- und / oder Gleichstromquellen. Verständnisfrage: Warum kommen Kondensatoren und Spulen in der Berechnung von Gleichspannungsnetzen nicht vor?

Linear: Bei linearen Netzen existieren nur lineare Strom-Spannung-Beziehungen, d.h. es gilt

- das Ohmsche Gesetz $U = RI$ für Widerstände und
- alle Quellen haben eine lineare U-I-Kennlinie.

$\rightarrow$ Es entstehen lineare Gleichungssysteme zur Berechnung der Spannungen und Ströme.

Vereinfachnung: Da in einem linearen Netzwerk alle Spannungen und Ströme der Widerstände über das Ohmsche Gesetz $U = IR$ voneinander abhängen, braucht man nur

- die Ströme oder
- die Spannungen zu berechnen.

Mathematik Wenn alle Quellen und Widerstände bekannt sind, müssen für n Widerstände die Spannungen und Ströme berechnet werden, also $2n$ Unbekannte.

- Es müssen $2n$ Gleichungen zur Lösung gefunden werden.
- Das Ohmsche Gesetz $U = RI$ stellt n Gleichungen für $2n$ Unbekannte zur Verfügung.
- Es müssen weitere n Gleichungen gefunden werden.

Verfahren: Es existieren fünf Verfahren zur Berechnung der Ströme und Spannungen in linearen Netzwerken:

1. Direktes Anwenden der Kirchhoffschen Gleichungen
2. Ersatzspannungs- oder Ersatzstromquelle
3. Überlagerungssatz oder Superpositionsprinzip
4. Maschenanalyse oder Maschenstromverfahren
5. Knotenanalyse oder Knotenpotentialverfahren

3.2. Kirchhoffsche Gleichungen

Aufgabe: Gegeben sei ein Netz aus Abb. 3.2.1 mit zwei Spannungsquellen. Der Strom I_3 durch den Widerstand R_3 soll analytisch bestimmt werden!

$\rightarrow$ Reichen die bekannten Methoden aus? Ja!

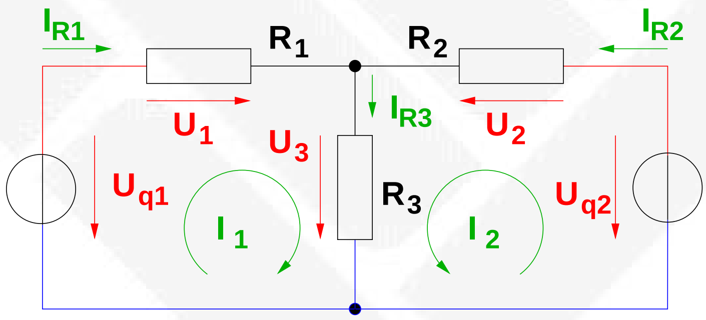


Abbildung 3.2.1.: T-Netzwerk mit zwei Spannungsquellen

Lösung: Anwendung des Ohmschen Gesetzes und der Kirchhoffschen Gleichungen zur Bestimmung der 6 Unbekannten:

- Spannungen $U_{1\ldots3}$ und
- Ströme $I_{R_1 \ldots R_3}$.

Aufgabe: Für die 6 Unbekannten werden 6 unabhängige Gleichungen benötigt. Wie findet man sie?

Netzwerk: Ein elektrisches Netzwerk besteht aus z Zweigen, die an den k Knoten miteinander verbunden sind und somit m Maschen bilden. In Abb. 3.2.2 sind für die Schaltung aus Abb. 3.2.1 Zweige, Knoten und Maschen gezeichnet.

- An einem Knoten sind mindestens 3 Zweige angeschlossen.
- Ein Zweig verbindet 2 Knoten miteinander wobei alle Bauelemente vom selben Strom durch flossen werden.
- Eine Masche ist ein geschlossener Weg über Zweige und Knoten.

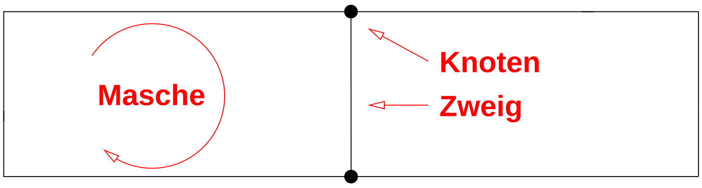


Abbildung 3.2.2.: Darstellung von Zweigen, Knoten und Maschen

Frage 1: Wie viele Zweige, Knoten und Maschen enthält die Beispielschaltung aus Abb. 3.2.1 ?

- Zweige: $z = 3$, zwischen je zwei Punkten
- Knoten: $k = 2$, die beiden schwarzen Punkte
- Maschen: $m = 3$, links, rechts und außen herum

$\rightarrow$ Damit ergeben sich 2 Knotengleichungen, 3 Maschengleichungen und 3 Gleichungen aus dem Ohmschen Gesetz, also 8 Gleichungen für 6 Unbekannte.

Frage 2: Welche der 8 Gleichungen sind linear unabhängig?

- Aus dem Ohmschen Gesetz für jeden Zweig ergeben sich $z = 3$ unabhängige Gleichungen.
- Bei $k = 2$ Knoten ist $k - 1 = 1$ Knotengleichung linear unabhängig.
- Also müssen von den Maschengleichungen

$$m' = z - (k - 1) = 3 - (2 - 1) = 2 \tag{3.2.1}$$

unabhängig sein!

Frage 3: Wie findet man alle linear unabhängigen Maschengleichungen?

$\rightarrow$ In dem einfachen Beispiel kann eine beliebige der 3 Maschen weggelassen werden.

Praxis: Eine praktische Methode zur Auswahl unabhängiger Maschen ist:

Nach Auswahl einer Masche trennt man diese Masche in einem beliebigen Zweig auf. Weitere Maschen dürfen keine aufgetrennten Zweige enthalten. Es werden so viele Maschen gebildet wie möglich sind.

3.2.1. Beispiel zu den Kirchhoffschen Gleichungen

Ohmsches Gesetz: 3 Gleichungen

$$U_i = R_i I_{R_i} \qquad ,i = 1,3 \tag{3.2.2}$$

Maschenregel: 2 Gleichungen

$$\begin{aligned} -U_{q1} + U_1 + U_3 &= 0 \\ -U_{q2} + U_2 + U_3 &= 0 \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Knotenregel: 1 Gleichung

$$I_{R_1} + I_{R_2} - I_{R_3} = 0 \tag{3.2.4}$$

Mathematik: Zur Berechnung der Zweigströme erhält man ausgehend von den Maschengleichungen

$$\begin{array}{ccccccc} U_1 & & & + & U_3 & = & U_{q1} \\ & & U_2 & + & U_3 & = & U_{q2} \end{array} \tag{3.2.5}$$

Mit dem Ohmschen Gesetz folgt

$$\begin{array}{ccccccc} I_{R_1} R_1 & & & + & I_{R_3} R_3 & = & U_{q1} \\ & & I_{R_2} R_2 & + & I_{R_3} R_3 & = & U_{q2} \end{array} \tag{3.2.6}$$

Mit der Knotengleichung kann der Strom I_3 eliminiert werden

$$\begin{array}{ccccccccc} I_{R_1} R_1 & & & + & (I_{R_1} + I_{R_2}) & R_3 & = & U_{q1} \\ & & I_{R_2} R_2 & + & (I_{R_1} + I_{R_2}) & R_3 & = & U_{q2} \end{array} \tag{3.2.7}$$

Ordnet man diese Gleichungen nach den beiden Unbekannten, so ergibt sich folgendes Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} (R_1 + R_3) & I_{R_1} & + & R_3 & I_{R_2} & = & U_{q1} \\ R_3 & I_{R_1} & + & (R_2 + R_3) & I_{R_2} & = & U_{q2} \end{array} \tag{3.2.8}$$

oder in Matrizenschreibweise

$$\boxed{\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{R_1} \\ I_{R_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{q_1} \\ U_{q_2} \end{bmatrix}} \tag{3.2.9}$$

Ergebnis: Die Untersuchung eines linearen Netzes führt zu einem linearen Gleichungssystem für die Unbekannten (Ströme), das nun nur noch aufgelöst werden muss.

$\rightarrow$ Anwenden mathematischer Methoden, heute mit Taschenrechner direkt lösbar.

Matrizen: Für alle, die noch keine Matrizenrechnung kennen kommt hier die minimal notwendige Mathematik. Die Schreibweise mit der 3×3-Matrix[1]

$$\begin{bmatrix} R_{1A} & R_{1B} & R_{1C} \\ R_{2A} & R_{2B} & R_{2C} \\ R_{3A} & R_{3B} & R_{3C} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} \tag{3.2.10}$$

ist nur eine verkürtzte Schreibweise für das Gleichungssystem mit den drei Gleichungen

$$R_{1A} \cdot I_A + R_{1B} \cdot I_B + R_{1C} \cdot I_C = U_1 \tag{3.2.11}$$
$$R_{2A} \cdot I_A + R_{2B} \cdot I_B + R_{2C} \cdot I_C = U_2 \tag{3.2.12}$$
$$R_{3A} \cdot I_A + R_{3B} \cdot I_B + R_{3C} \cdot I_C = U_3 \tag{3.2.13}$$

in der beispielhaft die Elemente R_{ij} der Matrix mit den Komponenten I_j des Ergebnisvektors multipliziert werden.

Rang: Das lineare Gleichungssystem

$$\underline{R} \cdot \underline{I} = \underline{U} \tag{3.2.14}$$

ist genau dann eindeutig lösbar, wenn der Rang der Matrix $\underline{R}$ gleich der Anzahl der Zeilen der Matrix ist. Dann ist aber auch die Determinate der Matrix ungleich Null.

$\rightarrow$ Alle Gleichungen sind linear unabhängig!

[1] Die Buchstaben A, B, C dienen nur der besseren Unterscheidung der Spalten von den Zeilen mit den Ziffern 1, 2 und 3.

Determinaten: Die Determinante einer 3×3-Koeffizientenmatrix $\underline{R}$ berechnet sich aus dem Produkt der Hauptdiagonalen minus dem Produkt der Nebendiagonalen zu

$$\begin{aligned} D = |\underline{R}| &= \left| \begin{array}{ccc|cc} R_{1A} & R_{1B} & R_{1C} & R_{1A} & R_{1B} \\ R_{2A} & R_{2B} & R_{2C} & R_{2A} & R_{2B} \\ R_{3A} & R_{3B} & R_{3C} & R_{3A} & G_{3B} \end{array} \right| \\ &= R_{1A}R_{2B}R_{3C} + R_{1B}R_{2C}R_{3A} + R_{1C}R_{2A}R_{3B} - \\ &\quad R_{3A}R_{2B}R_{1C} - R_{3B}R_{2C}R_{1A} - R_{3C}R_{2A}R_{1B} \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

Cramer: Die Lösung des linearen Gleichungssystems 3.2.9 ist mit der Cramer'schen Regel

$$x_i = \frac{D_i}{D} \tag{3.2.16}$$

möglich[2]. Die Determinante der 2×2-Koeffizientenmatrix berechnet sich aus dem Produkt der Hauptdiagonale minus dem Produkt der Nebendiagonale zu

$$D = \begin{vmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{vmatrix} = R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3 \neq 0 \tag{3.2.17}$$

und entsprechend die beiden Hilfsdeterminanten zu

$$D_1 = \begin{vmatrix} U_{q_1} & R_3 \\ U_{q_2} & R_2 + R_3 \end{vmatrix} = U_{q_1}(R_2 + R_3) - U_{q_2}R_3 \tag{3.2.18}$$

und zu

$$D_2 = \begin{vmatrix} R_1 + R_3 & U_{q_1} \\ R_3 & U_{q_2} \end{vmatrix} = U_{q_2}(R_1 + R_3) - U_{q_1}R_3 \tag{3.2.19}$$

$\rightarrow$ Aus $D \neq 0$ folgt, dass eine eindeutige Lösung des Gleichungssystems existiert!

Ströme: Damit ergeben sich die Teilströme

$$I_{R_1} = \frac{D_1}{D} = \frac{U_{q_1}(R_2 + R_3) - U_{q_2}R_3}{\sum R_iR_j} \tag{3.2.20}$$

und

$$I_{R_2} = \frac{D_2}{D} = \frac{U_{q_2}(R_1 + R_3) - U_{q_1}R_3}{\sum R_iR_j} \tag{3.2.21}$$

Der gesuchte Strom I_{R_3} ist dann die Summe dieser beiden Ströme

$$I_{R_3} = I_{R_1} + I_{R_2} = \frac{U_{q_1}R_2 + U_{q_2}R_1}{\sum R_iR_j} \tag{3.2.22}$$

3.2.2. Bewertung der Kirchhoffschen Gleichungen

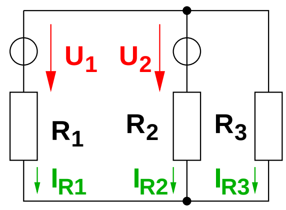
Bewertung: Anwenden der Kirchhoffschen Gleichungen

- POSITIV: Es ist das allgemeinste Verfahren zur Bestimmung aller Unbekannten und ist immer einsetzbar.
- Es sind maximal z Knoten- und Maschen-Gleichungen zu lösen. Zusätzlich werden z Ohmsche Gleichungen verwendet.
- NEGATIV: Es sind immer alle z Gleichungen notwendig, auch wenn im Extremfall nur ein Strom oder eine Spannung gesucht wird.
- Alle anderen Verfahren basieren ebenfalls auf den Kirchhoffschen Gleichungen.

[2] Oder mit dem gaußschen Eliminationsverfahren, bei dem die Koeffizientenmatrix in Dreiecksform gebracht wird.

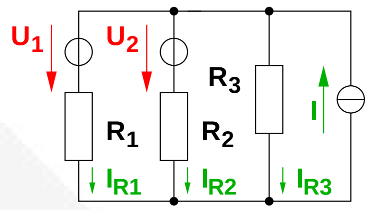
Aufgabe 3.9.8
(Netzwerk)
-> Seite 153

Die angegebene Schaltung mit $U_1 = 30V$ und $U_2 = 24V$ enthält die Widerstände $R_1 = 5\Omega$ und $R_2 = R_3 = 10\Omega$.
Es sind die in den Widerständen R_1, R_2 und R_3 fließenden Ströme mit dem Knotenpotentialverfahren zu bestimmen.



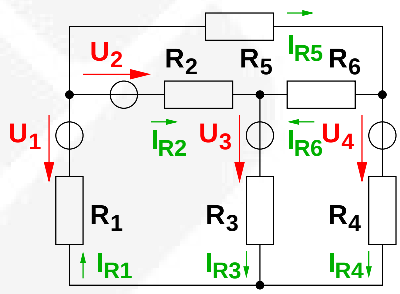
Aufgabe 3.9.9
(Netzwerk)
-> Seite 153

Die angegebene Schaltung mit $U_1 = 20V$, $U_2 = 10V$, $I = 6{,}3A$ enthält die Widerstände $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 2{,}5\Omega$ und $R_3 = 5\Omega$.
Es sind die in den Widerständen R_1, R_2 und R_3 fließenden Ströme mit dem Knotenpotentialverfahren zu bestimmen.



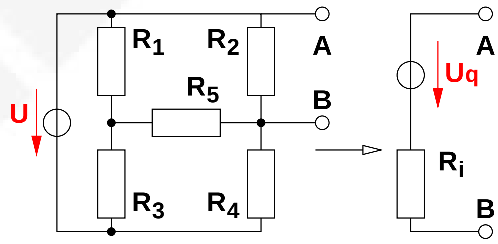
Aufgabe 3.9.10
(Netzwerk)
-> Seite 154

Die angegebene Schaltung mit $U_1 = 36V$, $U_2 = 9V$, $U_3 = 10V$ und $U_4 = 12V$ enthält die Widerstände $R_1 = R_5 = 5\Omega$, $R_2 = 6\Omega$, $R_3 = R_6 = 3\Omega$ und $R_4 = 4\Omega$.
Die in den Widerständen R_1 bis R_6 fließenden Ströme sind zu bestimmen.



Aufgabe 3.9.11
(ESQ)
-> Seite 154

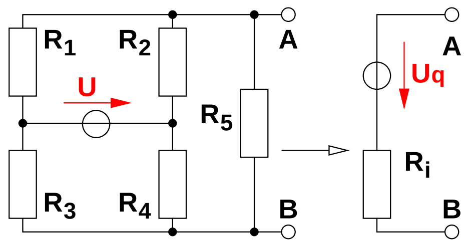
Die angegebene Schaltung mit $U = 11V$, $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 3{,}5\Omega$, $R_3 = 6\Omega$, $R_4 = 9\Omega$ und $R_5 = 3\Omega$ soll bezüglich der Punkte A und B durch eine elektrisch gleichwertige Ersatzspannungsquelle ersetzt werden.



Berechnen Sie die Werte für U_q und R_i mit Hilfe der Kirchhoff'schen Gleichungen!

Aufgabe 3.9.12
(ESQ)
-> Seite 154

Die angegebene Schaltung mit $U = 9V$, $R_1 = R_4 = 3\Omega$, $R_2 = R_3 = 1{,}5\Omega$ und $R_5 = 6\Omega$ soll bezüglich der Punkte A und B durch eine elektrisch gleichwertige Ersatzspannungsquelle ersetzt werden.



Welche Werte sind für U_q und R_i erforderlich?

Lösung zur
Aufgabe 3.9.10
(Netzwerk)

Fehlende Ströme

$$I_2 = I_1 - I_5 = 2{,}2A - 1{,}8A = \underline{\underline{0{,}4A}} \tag{A.2.24}$$
$$I_3 = I_1 - I_4 = 2{,}2A - 1{,}0A = \underline{\underline{1{,}2A}} \tag{A.2.25}$$
$$I_6 = I_5 - I_4 = 1{,}8A - 1{,}0A = \underline{\underline{0{,}8A}} \tag{A.2.26}$$

Lösung zur
Aufgabe 3.9.11
(ESQ)

Gesuchte Quellenspannungzu

$$U_q = \frac{R_a}{R_b + R_a} U = \frac{2{,}52\Omega}{2{,}52\Omega + 5{,}4\Omega} \cdot 11V = \underline{\underline{3{,}5V}} \tag{A.2.27}$$

Innenwiderstand

$$\begin{aligned} R_i &= R_{AB} = R_a || R_b = \frac{1}{G_a + G_b} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2{,}52\Omega} + \frac{1}{5{,}4\Omega}} = \underline{\underline{1{,}72\Omega}} \end{aligned} \tag{A.2.28}$$

Lösung zur
Aufgabe 3.9.12
(ESQ)

Gesuchte Innenwiderstand

$$\begin{aligned} R_i &= (R_{12} + R_{34}) || R_5 = \frac{1}{G_{1234} + G_5} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2\Omega} + \frac{1}{6\Omega}} = \underline{\underline{1{,}5\Omega}} \end{aligned} \tag{A.2.29}$$

Quellenspannung der Ersatzquelle

$$U_q = R_i I_K = 1{,}5\Omega \cdot (-1{,}5A) = \underline{\underline{-2{,}25V}} \tag{A.2.30}$$

Lösung zur
Aufgabe 3.9.13
(Netzwerk)

Gesuchte Strom

$$I_5 = \frac{U_q}{R_i + R_5} = \frac{8{,}0V}{5{,}0\Omega + 11\Omega} = \underline{\underline{0{,}5A}} \tag{A.2.31}$$

Lösung zur
Aufgabe 3.9.14
(Netzwerk)

Gesuchte Strom

$$\begin{aligned} I_5 &= \frac{U_{q_1} + U_{q_2} - U_3}{R_{i_1} + R_5 + R_{i_2}} \\ &= \frac{8V + 6V - 5V}{4.0\Omega + 10\Omega + 2{,}67\Omega} = \underline{\underline{0{,}54A}} \end{aligned} \tag{A.2.32}$$