

Fachhochschule Münster University of Applied Sciences

Grundgebiete der Elektrotechnik 1

Teil 1: Gleichstrom

Teil 2: Wechselstrom

Peter Richert

(Stand: 2. Januar 2014)¹

Fachhochschule Münster, Fachbereich Elektrotechnik und Informatik

eLKaTe — Labor Kommunikationstechnik

Stegerwaldstraße 39, 48 565 Steinfurt, Tel.: +49 2551 9-62125,

eMail: peter.richert@fh-muenster.de

[http: www.ktet.fh-muenster.de](http://www.ktet.fh-muenster.de)

Inhaltsverzeichnis

I. Gleichstrom	1
1. Gleichstrom	2
1.1. Einleitung	3
1.2. Physikalische Größen	6
1.3. Zusammenfassung	10
2. Gleichstromelemente	11
2.1. Grundbegriffe	11
2.1.1. Elektrischer Strom	12
2.1.2. Elektrische Spannung	14
2.2. Stromkreis	15
2.2.1. Ohmsches Gesetz	16
2.2.2. Elektrischer Widerstand	17
2.2.3. Widerstände als Mess-Sensoren	19
2.2.4. Realer Stromkreis	20
2.3. Kirchhoffsche Gesetze	20
2.3.1. Kirchhoffsche Knotenregel	21
2.3.2. Parallelschaltung von Widerständen	22
2.3.3. Kirchhoffsche Maschenregel	23
2.3.4. Reihenschaltung von Widerständen	24
2.4. Anwendungen der Kirchhoffschen Gleichungen	26
2.4.1. Schiebewiderstand ohne Belastung	26
2.4.2. Schiebewiderstand mit Belastung	27
2.4.3. Vorwiderstand	28
2.4.4. Strommesser	29
2.4.5. Spannungsmesser	30
2.4.6. Spannungs- und Strommessung	32
2.4.7. Wheatstonesche Brückenschaltung	32
2.5. Arbeit und Leistung	35
2.6. Spannungsquelle	36
2.6.1. Ersatzschaltbild	37
2.6.2. Kennlinie	38
2.6.3. Reale Spannungsquelle im realen Stromkreis	38
2.6.4. Anpassung	39
2.7. Stromquelle	41
2.8. Nichtlinearer Zweipol	42
2.9. Zusammenfassung	43
2.10. Übungsaufgaben	43
3. Gleichstromnetzwerke	48
3.1. Grundlagen	48

3.2.	Kirchhoffsche Gleichungen	49
3.2.1.	Beispiel zu den Kirchhoffschen Gleichungen	50
3.2.2.	Bewertung der Kirchhoffschen Gleichungen	52
3.3.	Ersatzquellen	53
3.3.1.	Beispiel zu Ersatzquellen	53
3.3.2.	Stern-Dreieck-Umwandlung	55
3.3.3.	Bewertung der Ersatzquellen	57
3.4.	Überlagerungssatz	57
3.4.1.	Beispiel zum Überlagerungssatz	57
3.4.2.	Bewertung des Überlagerungssatzes	59
3.5.	Maschenanalyse	59
3.5.1.	Topologie eines Netzes	60
3.5.2.	Beispiel zum Maschenanalyse	60
3.5.3.	Ideale Stromquellen bei der Maschenanalyse	61
3.5.4.	Bewertung der Maschenanalyse	62
3.6.	Knotenanalyse	62
3.6.1.	Beispiel zur Knotenanalyse	63
3.6.2.	Ideale Spannungsquellen bei der Knotenanalyse	64
3.6.3.	Automatisierung der Knotenanalyse	64
3.6.4.	Modifizierte Knotenanalyse	67
3.6.5.	Beispiel zur modifizierten Knotenanalyse	69
3.6.6.	Bewertung der Knotenanalyse	69
3.6.7.	Vergleich am Beispiel Brückenschaltung	69
3.7.	Nichtlineare Netze	70
3.8.	Zusammenfassung	71
3.9.	Übungsaufgaben	71

II. Wechselstrom 76

4. Wechselströme 77

4.1.	Formen und Arten von Wechselströmen	78
4.2.	Kenngrößen von Wechselströmen	78
4.3.	Eigenschaften sinusförmiger Wechselgrößen	80
4.4.	Messung und Darstellung der Kennwerte	88
4.5.	Addition im Zeitdiagramm	90
4.6.	Addition im Zeigerdiagramm	92
4.7.	Zusammenfassung	92
4.8.	Übungsaufgaben	93

5. Komplexe Rechnung 95

5.1.	Die komplexe Zahlenebene	95
5.2.	Rechenregeln für komplexe Zahlen	96
5.3.	Darstellung sinusförmiger Wechselgrößen	98

6. Wechselstromelemente 99

6.1.	Widerstand	100
6.1.1.	Leistung am Widerstand	101
6.2.	Kondensator	102
6.2.1.	Kapazitive Blindleistung	103
6.3.	Spule	104
6.3.1.	Induktive Blindleistung	106

6.4. Allgemeiner Wechselstromzweipol	108
6.4.1. Spannung, Strom und Phasenwinkel	108
6.4.2. Leistung im Zeitbereich	110
6.4.3. Komplexe Leistungsberechnung	111
6.5. Zusammenfassung	113
6.6. Übungsaufgaben	114
7. Wechselstromnetzwerke	117
7.1. Reale Bauelemente	117
7.2. Impedanz	119
7.2.1. Reihenschaltungen	121
7.3. Admittanz	121
7.3.1. Parallelschaltungen	123
7.4. Ersatzimpedanz einer Schaltung	124
7.5. Umwandlung komplexer Widerstände	125
7.6. Leistungsanpassung	127
7.7. Blindleistungskompensation	129
7.8. Zusammenfassung	130
7.9. Übungsaufgaben	130
Literatur	136
Index	139
Formeln	142
III. Anhang	147
A. Ergebnisse der Übungsaufgaben	148
A.1. Übungsaufgaben zu Gleichstromelemente	148
A.2. Übungsaufgaben zu Gleichstromnetzwerke	152
A.3. Übungsaufgaben zu Wechselströme	156
A.4. Übungsaufgaben zu Wechselstromelemente	158
A.5. Übungsaufgaben zu Wechselstromnetzwerke	162

3. Gleichstromnetzwerke

Ziele: Das Ziel dieses Kapitels ist das Kennenlernen von Verfahren zur Berechnung von Spannungen und Strömen in elektrischen Netzwerken.

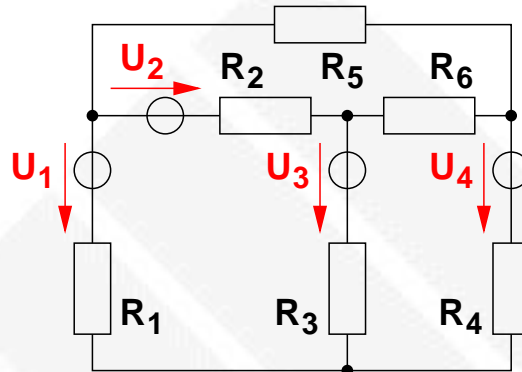


Abbildung 3.0.1.: Beispielnetzwerk aus einer Übungsaufgabe

→ Die Berechnung der Ströme in den Widerständen des Netzes in Abb. 3.0.1 bei gegebenen Spannungen und Widerständen ist Inhalt der Aufgabe 3.9.10.

3.1. Grundlagen

Aufgabe: Ziel der Netzwerkanalyse ist die Berechnung von Spannungen und / oder Strömen in elektrischen Netzwerken, also der beliebigen Verschaltung von elektrischen Bauelementen.

→ Gleichstromanalyse im wesentlichen mit Widerständen und Gleichspannungs- und / oder Gleichstromquellen. Verständnisfrage: Warum kommen Kondensatoren und Spulen in der Berechnung von Gleichspannungsnetzen nicht vor?

Linear: Bei linearen Netzen existieren nur lineare Strom-Spannung-Beziehungen, d.h. es gilt

- das Ohmsche Gesetz $U = RI$ für Widerstände und
- alle Quellen haben eine lineare U-I-Kennlinie.

→ Es entstehen lineare Gleichungssysteme zur Berechnung der Spannungen und Ströme.

Vereinfachung: Da in einem linearen Netzwerk alle Spannungen und Ströme der Widerstände über das Ohmsche Gesetz $U = IR$ voneinander abhängen, braucht man nur

- die Ströme oder
- die Spannungen zu berechnen.

Mathematik Wenn alle Quellen und Widerstände bekannt sind, müssen für n Widerstände die Spannungen und Ströme berechnet werden, also $2n$ Unbekannte.

- Es müssen $2n$ Gleichungen zur Lösung gefunden werden.
- Das Ohmsche Gesetz $U = RI$ stellt n Gleichungen für $2n$ Unbekannte zur Verfügung.
- Es müssen weitere n Gleichungen gefunden werden.

Verfahren: Es existieren fünf Verfahren zur Berechnung der Ströme und Spannungen in linearen Netzwerken:

1. Direktes Anwenden der Kirchhoffschen Gleichungen
2. Ersatzspannungs- oder Ersatzstromquelle
3. Überlagerungssatz oder Superpositionsprinzip
4. Maschenanalyse oder Maschenstromverfahren
5. Knotenanalyse oder Knotenpotentialverfahren

3.2. Kirchhoffsche Gleichungen

Aufgabe: Gegeben sei ein Netz aus Abb. 3.2.1 mit zwei Spannungsquellen. Der Strom I_3 durch den Widerstand R_3 soll analytisch bestimmt werden!

→ Reichen die bekannten Methoden aus? Ja!

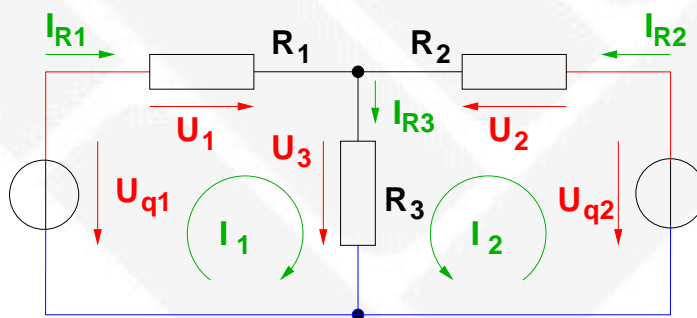


Abbildung 3.2.1.: T-Netzwerk mit zwei Spannungsquellen

Lösung: Anwendung des Ohmschen Gesetzes und der Kirchhoffschen Gleichungen zur Bestimmung der 6 Unbekannten:

- Spannungen $U_{1...3}$ und
- Ströme $I_{R_1...R_3}$.

Aufgabe: Für die 6 Unbekannten werden 6 unabhängige Gleichungen benötigt. Wie findet man sie?

Netzwerk: Ein elektrisches Netzwerk besteht aus z Zweigen, die an den k Knoten miteinander verbunden sind und somit m Maschen bilden. In Abb. 3.2.2 sind für die Schaltung aus Abb. 3.2.1 Zweige, Knoten und Maschen gezeichnet.

- An einem Knoten sind mindestens 3 Zweige angeschlossen.
- Ein Zweig verbindet 2 Knoten miteinander wobei alle Bauelemente vom selben Strom durch flossen werden.
- Eine Masche ist ein geschlossener Weg über Zweige und Knoten.

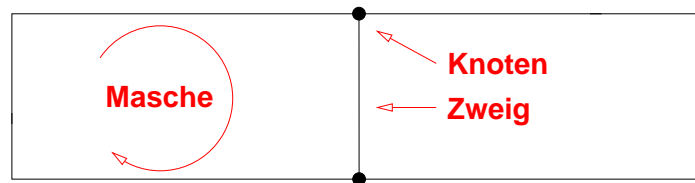


Abbildung 3.2.2.: Darstellung von Zweigen, Knoten und Maschen

Frage 1: Wie viele Zweige, Knoten und Maschen enthält die Beispielschaltung aus Abb. 3.2.1?

- Zweige: $z = 3$, zwischen je zwei Punkten
- Knoten: $k = 2$, die beiden schwarzen Punkte
- Maschen: $m = 3$, links, rechts und außen herum

→ Damit ergeben sich 2 Knotengleichungen, 3 Maschengleichungen und 3 Gleichungen aus dem Ohmschen Gesetz, also 8 Gleichungen für 6 Unbekannte.

Frage 2: Welche der 8 Gleichungen sind linear unabhängig?

- Aus dem Ohmschen Gesetz für jeden Zweig ergeben sich $z = 3$ unabhängige Gleichungen.
- Bei $k = 2$ Knoten ist $k - 1 = 1$ Knotengleichung linear unabhängig.
- Also müssen von den Maschengleichungen

$$m' = z - (k - 1) = 3 - (2 - 1) = 2 \quad (3.2.1)$$

unabhängig sein!

Frage 3: Wie findet man alle linear unabhängigen Maschengleichungen?

→ In dem einfachen Beispiel kann eine beliebige der 3 Maschen weggelassen werden.

Praxis: Eine praktische Methode zur Auswahl unabhängiger Maschen ist:

Nach Auswahl einer Masche trennt man diese Masche in einem beliebigen Zweig auf. Weitere Maschen dürfen keine aufgetrennten Zweige enthalten. Es werden so viele Maschen gebildet wie möglich sind.

3.2.1. Beispiel zu den Kirchhoffschen Gleichungen

Ohmsches Gesetz: 3 Gleichungen

$$U_i = R_i I_{R_i} \quad , i = 1, 3 \quad (3.2.2)$$

Maschenregel: 2 Gleichungen

$$\begin{aligned} -U_{q1} + U_1 + U_3 &= 0 \\ -U_{q2} + U_2 + U_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Knotenregel: 1 Gleichung

$$I_{R_1} + I_{R_2} - I_{R_3} = 0 \quad (3.2.4)$$

Mathematik: Zur Berechnung der Zweigströme erhält man ausgehend von den Maschengleichungen

$$\begin{aligned} U_1 &+ U_3 = U_{q1} \\ U_2 &+ U_3 = U_{q2} \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Mit dem Ohmschen Gesetz folgt

$$\begin{aligned} I_{R_1} R_1 &+ I_{R_3} R_3 = U_{q1} \\ I_{R_2} R_2 &+ I_{R_3} R_3 = U_{q2} \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Mit der Knotengleichung kann der Strom I_3 eliminiert werden

$$\begin{aligned} I_{R_1} R_1 &+ (I_{R_1} + I_{R_2}) R_3 = U_{q1} \\ I_{R_2} R_2 &+ (I_{R_1} + I_{R_2}) R_3 = U_{q2} \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Ordnet man diese Gleichungen nach den beiden Unbekannten, so ergibt sich folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (R_1 + R_3) I_{R_1} &+ R_3 I_{R_2} = U_{q1} \\ R_3 I_{R_1} &+ (R_2 + R_3) I_{R_2} = U_{q2} \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

oder in Matrixschreibweise

$$\boxed{\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{R_1} \\ I_{R_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{q1} \\ U_{q2} \end{bmatrix}} \quad (3.2.9)$$

Ergebnis: Die Untersuchung eines linearen Netzes führt zu einem linearen Gleichungssystem für die Unbekannten (Ströme), das nun nur noch aufgelöst werden muss.

→ Anwenden mathematischer Methoden, heute mit Taschenrechner direkt lösbar.

Matrizen: Für alle, die noch keine Matrizenrechnung kennen kommt hier die minimal notwendige Mathematik. Die Schreibweise mit der 3×3 -Matrix¹

$$\begin{bmatrix} R_{1A} & R_{1B} & R_{1C} \\ R_{2A} & R_{2B} & R_{2C} \\ R_{3A} & R_{3B} & R_{3C} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} \quad (3.2.10)$$

ist nur eine verkürzte Schreibweise für das Gleichungssystem mit den drei Gleichungen

$$R_{1A} \cdot I_A + R_{1B} \cdot I_B + R_{1C} \cdot I_C = U_1 \quad (3.2.11)$$

$$R_{2A} \cdot I_A + R_{2B} \cdot I_B + R_{2C} \cdot I_C = U_2 \quad (3.2.12)$$

$$R_{3A} \cdot I_A + R_{3B} \cdot I_B + R_{3C} \cdot I_C = U_3 \quad (3.2.13)$$

in der beispielhaft die Elemente R_{ij} der Matrix mit den Komponenten I_j des Ergebnisvektors multipliziert werden.

Rang: Das lineare Gleichungssystem

$$\underline{R} \cdot \underline{I} = \underline{U} \quad (3.2.14)$$

ist genau dann eindeutig lösbar, wenn der Rang der Matrix \underline{R} gleich der Anzahl der Zeilen der Matrix ist. Dann ist aber auch die Determinante der Matrix ungleich Null.

→ Alle Gleichungen sind linear unabhängig!

¹Die Buchstaben A, B, C dienen nur der besseren Unterscheidung der Spalten von den Zeilen mit den Ziffern 1, 2 und 3.

Determinanten: Die Determinante einer 3×3 -Koeffizientenmatrix \underline{R} berechnet sich aus dem Produkt der Hauptdiagonalen minus dem Produkt der Nebendiagonalen zu

$$\begin{aligned}
 D = |\underline{R}| &= \begin{vmatrix} R_{1A} & R_{1B} & R_{1C} \\ R_{2A} & R_{2B} & R_{2C} \\ R_{3A} & R_{3B} & R_{3C} \end{vmatrix} = R_{1A}R_{2B}R_{3C} + R_{1B}R_{2C}R_{3A} + R_{1C}R_{2A}R_{3B} - \\
 &= R_{1A}R_{2B}R_{3C} + R_{1B}R_{2C}R_{3A} + R_{1C}R_{2A}R_{3B} - \\
 &\quad R_{3A}R_{2B}R_{1C} - R_{3B}R_{2C}R_{1A} - R_{3C}R_{2A}R_{1B}
 \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

Cramer: Die Lösung des linearen Gleichungssystems 3.2.9 ist mit der Cramer'schen Regel

$$x_i = \frac{D_i}{D} \tag{3.2.16}$$

möglich². Die Determinante der 2×2 -Koeffizientenmatrix berechnet sich aus dem Produkt der Hauptdiagonale minus dem Produkt der Nebendiagonale zu

$$D = \begin{vmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{vmatrix} = R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3 \neq 0 \tag{3.2.17}$$

und entsprechend die beiden Hilfsdeterminanten zu

$$D_1 = \begin{vmatrix} U_{q1} & R_3 \\ U_{q2} & R_2 + R_3 \end{vmatrix} = U_{q1}(R_2 + R_3) - U_{q2}R_3 \tag{3.2.18}$$

und zu

$$D_2 = \begin{vmatrix} R_1 + R_3 & U_{q1} \\ R_3 & U_{q2} \end{vmatrix} = U_{q2}(R_1 + R_3) - U_{q1}R_3 \tag{3.2.19}$$

→ Aus $D \neq 0$ folgt, dass eine eindeutige Lösung des Gleichungssystems existiert!

Ströme: Damit ergeben sich die Teilströme

$$I_{R_1} = \frac{D_1}{D} = \frac{U_{q1}(R_2 + R_3) - U_{q2}R_3}{\sum R_i R_j} \tag{3.2.20}$$

und

$$I_{R_2} = \frac{D_2}{D} = \frac{U_{q2}(R_1 + R_3) - U_{q1}R_3}{\sum R_i R_j} \tag{3.2.21}$$

Der gesuchte Strom I_{R_3} ist dann die Summe dieser beiden Ströme

$$I_{R_3} = I_{R_1} + I_{R_2} = \frac{U_{q1}R_2 + U_{q2}R_1}{\sum R_i R_j} \tag{3.2.22}$$

3.2.2. Bewertung der Kirchhoffschen Gleichungen

Bewertung: Anwenden der Kirchhoffschen Gleichungen

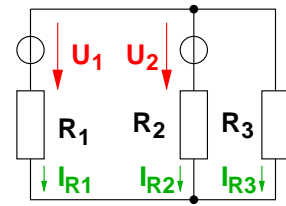
- **POSITIV:** Es ist das allgemeinste Verfahren zur Bestimmung aller Unbekannten und ist immer einsetzbar.
- Es sind maximal z Knoten- und Maschen-Gleichungen zu lösen. Zusätzlich werden z Ohmsche Gleichungen verwendet.
- **NEGATIV:** Es sind immer alle z Gleichungen notwendig, auch wenn im Extremfall nur ein Strom oder eine Spannung gesucht wird.
- Alle anderen Verfahren basieren ebenfalls auf den Kirchhoffschen Gleichungen.

²Oder mit dem gaußschen Eliminationsverfahren, bei dem die Koeffizientenmatrix in Dreiecksform gebracht wird.

Aufgabe 3.9.8

(Netzwerk)
-> Seite 153

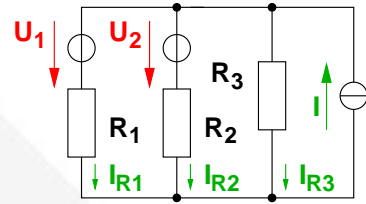
Die angegebene Schaltung mit $U_1 = 30V$ und $U_2 = 24V$ enthält die Widerstände $R_1 = 5\Omega$ und $R_2 = R_3 = 10\Omega$. Es sind die in den Widerständen R_1 , R_2 und R_3 fließenden Ströme mit dem Knotenpotentialverfahren zu bestimmen.



Aufgabe 3.9.9

(Netzwerk)
-> Seite 153

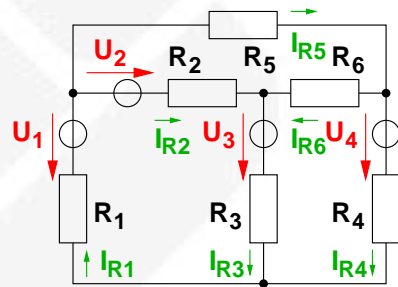
Die angegebene Schaltung mit $U_1 = 20V$, $U_2 = 10V$, $I = 6,3A$ enthält die Widerstände $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 2,5\Omega$ und $R_3 = 5\Omega$. Es sind die in den Widerständen R_1 , R_2 und R_3 fließenden Ströme mit dem Knotenpotentialverfahren zu bestimmen.



Aufgabe 3.9.10

(Netzwerk)
-> Seite 154

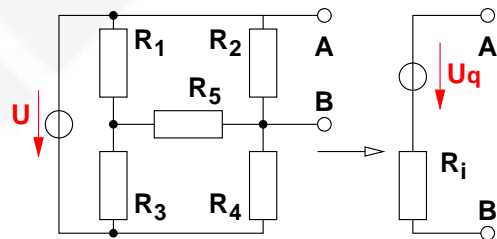
Die angegebene Schaltung mit $U_1 = 36V$, $U_2 = 9V$, $U_3 = 10V$ und $U_4 = 12V$ enthält die Widerstände $R_1 = R_5 = 5\Omega$, $R_2 = 6\Omega$, $R_3 = R_6 = 3\Omega$ und $R_4 = 4\Omega$. Die in den Widerständen R_1 bis R_6 fließenden Ströme sind zu bestimmen.



Aufgabe 3.9.11

(ESQ)
-> Seite 154

Die angegebene Schaltung mit $U = 11V$, $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 3,5\Omega$, $R_3 = 6\Omega$, $R_4 = 9\Omega$ und $R_5 = 3\Omega$ soll bezüglich der Punkte A und B durch eine elektrisch gleichwertige Ersatzspannungsquelle ersetzt werden.

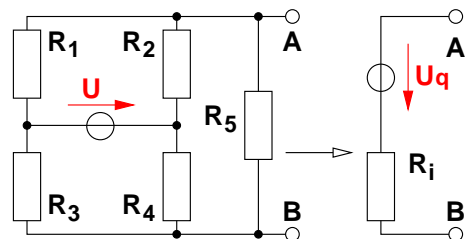


Berechnen Sie die Werte für U_q und R_i mit Hilfe der Kirchhoff'schen Gleichungen!

Aufgabe 3.9.12

(ESQ)
-> Seite 154

Die angegebene Schaltung mit $U = 9V$, $R_1 = R_4 = 3\Omega$, $R_2 = R_3 = 1,5\Omega$ und $R_5 = 6\Omega$ soll bezüglich der Punkte A und B durch eine elektrisch gleichwertige Ersatzspannungsquelle ersetzt werden.



Welche Werte sind für U_q und R_i erforderlich?

**Lösung zur
Aufgabe 3.9.10**
(Netzwerk)

Fehlende Ströme

$$I_2 = I_1 - I_5 = 2,2A - 1,8A = \underline{\underline{0,4A}} \quad (\text{A.2.24})$$

$$I_3 = I_1 - I_4 = 2,2A - 1,0A = \underline{\underline{1,2A}} \quad (\text{A.2.25})$$

$$I_6 = I_5 - I_4 = 1,8A - 1,0A = \underline{\underline{0,8A}} \quad (\text{A.2.26})$$

**Lösung zur
Aufgabe 3.9.11**
(ESQ)

Gesuchte Quellenspannung

$$U_q = \frac{R_a}{R_b + R_a} U = \frac{2,52\Omega}{2,52\Omega + 5,4\Omega} \cdot 11V = \underline{\underline{3,5V}} \quad (\text{A.2.27})$$

Innenwiderstand

$$\begin{aligned} R_i &= R_{AB} = R_a || R_b = \frac{1}{G_a + G_b} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2,52\Omega} + \frac{1}{5,4\Omega}} = \underline{\underline{1,72\Omega}} \end{aligned} \quad (\text{A.2.28})$$

**Lösung zur
Aufgabe 3.9.12**
(ESQ)

Gesuchte Innenwiderstand

$$\begin{aligned} R_i &= (R_{12} + R_{34}) || R_5 = \frac{1}{G_{1234} + G_5} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2\Omega} + \frac{1}{6\Omega}} = \underline{\underline{1,5\Omega}} \end{aligned} \quad (\text{A.2.29})$$

Quellenspannung der Ersatzquelle

$$U_q = R_i I_K = 1,5\Omega \cdot (-1,5A) = \underline{\underline{-2,25V}} \quad (\text{A.2.30})$$

**Lösung zur
Aufgabe 3.9.13**
(Netzwerk)

Gesuchte Strom

$$I_5 = \frac{U_q}{R_i + R_5} = \frac{8,0V}{5,0\Omega + 11\Omega} = \underline{\underline{0,5A}} \quad (\text{A.2.31})$$

**Lösung zur
Aufgabe 3.9.14**
(Netzwerk)

Gesuchte Strom

$$\begin{aligned} I_5 &= \frac{U_{q1} + U_{q2} - U_3}{R_{i1} + R_5 + R_{i2}} \\ &= \frac{8V + 6V - 5V}{4,0\Omega + 10\Omega + 2,67\Omega} = \underline{\underline{0,54A}} \end{aligned} \quad (\text{A.2.32})$$